22 группа 1 курс
Тема урока: «Иррациональные уравнения

1. Устная работа.

Выполняются следующие устные упражнения:

а) Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{\frac{7^8}{0{,}0625}}$; $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^3}$; $\sqrt[7]{\frac{2^7 \cdot 3^{21}}{5^{14}}}$.

б) Вычислите: $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$; $\sqrt[6]{9^6 \cdot 2^3} \cdot \sqrt[6]{2^9}$.

в) Для каких значений переменных равенство верно:

$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$; $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{x^2} = -x$; $\sqrt{-x^2} = -x$.

2. Изучение нового материала.

1**)** ***Определение. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня, называется иррациональным уравнением.***

Примеры: $\sqrt{x-1} = 5$; $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = x + 1$; $\sqrt[3]{x+6} = \sqrt{6-x}$ *и т.д.*

2)Основная задача- решить уравнение. А что это значит? (Найти корни уравнения или установить, что их нет). А что такое корень уравнения? (Ответ).

Давайте рассмотрим несколько иррациональных уравнений.

1. $\sqrt{x} = -1$; 2. $\sqrt{-5 - x^2} = 10$; 4. $\sqrt{2x - 12} = 3 - x$;

3. $\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{7x} = -0{,}5$; 5. $\sqrt{5x - 5} + \sqrt{1 - x^2} = 2$

Задания 4; 5 разобрать на доске.

В уравнении «4.» интервалы неотрицательности левой и правой части не имеют области пересечения. Следовательно, не решая уравнения можно сказать, что уравнение не имеет решения.

В уравнении «5.» областью допустимых значений является число, равное 1, и только оно может являться корнем данного уравнения. При подстановке этого значения в левую часть уравнения получаем 0, а это означает, что уравнение не имеет решения. Нахождение О.Д.З. намного упростило решение данного уравнения.

Вывод.Прежде чем решать уравнение, желательно, если это возможно, проверить надо ли решать это уравнение.

3) Решение иррациональных уравнений. Простейшие иррациональные уравнения.

Решение иррациональных уравнений основано на следующем свойстве: при возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение – следствие данного.

а) **Решение уравнения вида:**

$\sqrt{f(x)} = a$**, где a - некоторое число.**

Если a < 0, уравнение не имеет решения.

Если a ≥ 0, уравнение равносильно уравнению f(x) = a^2. Мы говорили о желательности записи О.Д.З. Почему в данном случае ее можно не писать?

($a^2 \geq 0$).

Рассмотрим уравнение: $\sqrt{x-2} = 2$; x – 2 = 4;

$\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = 4$; x =6.

Решаем №151 (1, 3, 5) устно.

б)**Уравнение, в правой части которого стоит функция.**

$\sqrt{f(x)} = g(x)$**.**

В этом случае при условии g(x) ≥ 0 имеем право обе части уравнения возвести в квадрат.

Получаем систему: $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases}$.

Замечание. Если не пишем условия неотрицательности правой части, решение уравнения заканчиваем проверкой.

Пример: $\sqrt{2x-3} = 3 - x$

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2x - 3 = (3-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x_1 = 6;\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ответ: x = 2.

в)**Уравнение, содержащее в левой и правой частях функции под знаком корня.**
Это уравнения вида:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}.$$

Решение этого уравнения равносильно решению системы:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Пример: $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x+19}$.

$$\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ 3x + 19 \geq 0 \\ 5x - 1 = 3x + 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0{,}2 \\ x = 10 \end{cases}$$

Ответ: 10

Замечание. Можно решать уравнения возведением обеих частей в квадрат, с обязательной проверкой полученных решений.

г) **Уравнение вида:** $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a$

Если a< 0, то уравнение не имеет решения.

Если a ≥ 0, то уравнение сводится к решению системы: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)^2 = a^2 \end{cases}$.

Замечание. а) Иногда удобнее для вычислений уединить один из корней.
б) Возвести обе части уравнения в квадрат и сделать проверку

Пример: $\sqrt{5x} + \sqrt{14-x} = 8$

$$\begin{cases} 5x \geq 0 \\ 14 - x \geq 0 \\ \left(\sqrt{5x} + \sqrt{14-x}\right)^2 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 14 \\ \sqrt{5x(14-x)} = 25 - 2x \end{cases}$$

Полученное уравнение сужает О.Д.З.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 12{,}5 \\ 9x^2 - 170x + 625 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 12{,}5 \\ x_1 = 5;\ x_2 = 13\frac{8}{9} \end{cases}$$

Ответ: 5

3. Выполнение упражнений по теме урока.

1. $\sqrt{x-2}=5$
2. $x+1=\sqrt{1-x}$
3. $\sqrt{4+x}=\sqrt{2x-1}$
4. $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$

4. Подведение итогов урока.

На сегодняшнем уроке мы познакомились с иррациональным уравнением и некоторыми методами решения иррационального уравнения.

Рефлексия: Занятие подходит к концу. Пожалуйста, поделитесь своими мыслями о сегодняшнем занятии (хотя бы одним предложением).

Вам для этого помогут слова:

- Я узнал…
- Я почувствовал…
- Я увидел…
- Я заметил, что…, и т.д.

7. Домашнее задание.

№ 151(1), 154(2,4), 155(4), 156(3)

Второй урок позволит рассмотреть оставшиеся нерассмотренные методы решения иррациональных уравнений. Такие уравнения приведены ниже.

д) **Уравнение вида:** $\boldsymbol{f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0}$

Это возможно тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

а) Приравнивая каждый из множителей к нулю, получаем значения неизвестного и делаем проверку.

б) Используем О.Д.З.: $g(x)\geq 0$. Делаем проверку по О.Д.З.

е)**Использование свойств монотонности функции при решении иррациональных уравнений.**

Рассмотрим это на примере решения уравнения $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$.

Пусть $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$ и $y=2$, т.е. рассмотрим правую и левую части уравнений как функции переменной x f(x) и g(x) соответственно. Тогда f(x) является монотонно возрастающей для всех $x\geq 1$, а g(x) = const. Используем утверждение, что, если одна из функций возрастающая (убывающая), другая – убывающая (возрастающая) или является постоянной, то уравнение имеет не более одного корня. В нашем случае x = 1.

ж) **Решение иррациональных уравнений с помощью введения вспомогательной переменной.**

Рассматриваем на примере: $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$

Делаем следующую замену: $x^2+3x-6=y$.

Тогда уравнение принимает вид: $y-12+4\sqrt{y}=0$, а далее решение этого уравнения см.в разделе б).

З) **Решение иррациональных уравнений с помощью разложения на множители.**

Рассматриваем на примере: $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{x^2-1}$.

Каждое подкоренное выражение содержит общий множитель x-1, тогда, перенеся все члены уравнения в одну сторону, $\sqrt{x-1}$ можно общий множитель вынести за скобку и решать уравнение одним из рассмотренных ранее способов.