15 группа 1 курс.

Тема: **«Понятие производнои функции.**

.

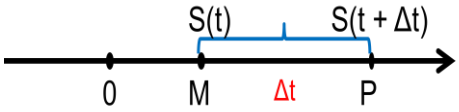
Объяснение нового материала (сопровождается презентацией).

I. Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о скорости движения.

Рассмотрим прямолинейное движение некоторого тела. Закон движения задан формулой S = S(t), т.е. каждому моменту времени t соответствует определённое значение пройденного пути S. Найти скорость движения тела в момент времени t.

Решение: Пусть в момент времени t тело находится в точке M.



Дадим аргументу t приращение Δt, за это время тело переместится в некоторую точку P, т.е. пройдёт путь ΔS.

Итак, за время Δt тело прошло путь ΔS.

Что можно найти, зная эти два значения?

$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, т.е. среднюю скорость движения тела за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$.

<u>*Определение:*</u> *Средней скоростью движения тела* называется отношение пройденного пути ко времени, в течение которого этот путь пройден.

В физике часто идёт речь о скорости v(t), т.е. скорости в определённый момент времени t, часто её называют *мгновенной скоростью.*

Можно рассуждать так: мгновенную скорость получим если Δt → 0, т.е. Δt выбирается всё меньше и меньше, т.е. $v_{\text{мгнов.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Можно указать ещё много задач из физики, геометрии (учебник, стр.157 – 159), для решения которых необходимо отыскать скорость изменения соответствующей функции.
Например, отыскание угловой скорости вращающегося тела, отыскание теплоёмкости тела при нагревании, линейный коэффициент расширения тел при нагревании, скорость химической реакции в данный момент времени и т.п.
Все эти задачи требуют для своего решения нахождения скорости изменения соответствующей функции.
Ввиду обилия задач, приводящих к вычислению скорости изменения функции или, иначе, к вычислению предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, оказалось необходимым выделить такой предел для произвольной функции и изучить его основные свойства.
Этот предел называется производной функции.
II. Определение производной.
<u>Определение:</u> Производной функции y = f(x) в данной точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.
Обозначение производной: $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

II. Определение производной

<u>Определение</u> Производной функции y = f(x) в данной точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Обозначение производной: $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если внимательно проанализировать определение производной, то мы обнаружим, что в нём заложен алгоритм её нахождения.

Алгоритм нахождения производной (по определению)

1. **Рассмотрим два значения аргумента x и Δx, где Δx – приращение аргумента.**
2. **Найдём приращение функции** $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. **Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента** $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.
4. **Вычислим предел этого отношения при** $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad \text{или} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

С помощью этого алгоритма можно найти производную любой функции, т.е. получить таблицу производных, а также доказать правила вычисления производных, которыми в дальнейшем мы и будем пользоваться.

Организация первичного контроля.

Первый пример учитель рассматривает совместно с учащимися с оформлением решения на доске и образцом записи в тетради. Все следующие примеры решаются учащимися либо самостоятельно с последующей проверкой, либо работой в группах (учитель – консультант), либо один учащийся выполняет работу на доске, остальные ведут запись решения в тетради.

Пример 1.

Найти производную функции y = C.

Решение: f(x) = C.

1.Возьмём два значения аргумента x и x + Δx.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0.$

3.$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$

Значит, $(C)' = 0$ или производная постоянной равна нулю.

Пример 2.

Найти производную функции y = x.

Решение: f(x) = x.

1.Возьмём два значения аргумента x и x + Δx.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$

3.$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$

Значит, $(x)' = 1$.

Пример 3.

Найти производную функции $y = x^2$.

Решение: $f(x) = x^2$.

1.Возьмём два значения аргумента x и x + Δx.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$

3.$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x.$

Значит, $(x^2)' = 2x$.

Пример 4.

Найти производную функции $y = kx + m$.

Решение: f(x) = $kx + m$.

1.Возьмём два значения аргумента x и x + Δx.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = k(x+\Delta x) + m - kx - m = kx + k\Delta x - kx = k\Delta x.$

3.$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

Значит, $(kx + m)' = k$.

Пример 5.

Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение: f(x) = $\frac{1}{x}$.

1.Возьмём два значения аргумента x и x + Δx.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$

3.$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} : \Delta x = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -1 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x^2 + x\Delta x} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} x^2 + \lim\limits_{\Delta x \to 0} x\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$

Значит, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

Пример 6.

Найти производную функции $y = \sqrt{x}$.

Решение: f(x) = $\sqrt{x}$.

1.Возьмём два значения аргумента x и x + Δx.

2.$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

3.$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$.

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = *$

Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое числителю

$$* = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Значит, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, с помощью определения производной, можно найти производную любой функции. Запишем найденные производные в таблицу и в дальнейшем будем ей пользоваться.

Итак,

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(kx + m)' = k$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Домашнее задание №193. № 194.

.

Спасибо за урок!